ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394
УДК 517.911, 517.988, 512.562, 51-7

О краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, моделирующей электрическую активность головного мозга

Анастасия Сергеевна ПАТРИНА
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Исследуется модель типа Хопфилда динамики электрической активности головного мозга, представляющая собой систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{v}_i(t) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(v_j(t-\tau_{ji})\big) + I_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \quad t \ge 0.$$

Параметры модели считаются заданными: $\alpha > 0$, $\tau_{ii} = 0$, $w_{ii} = 0$, $\tau_{ji} \ge 0$ и $w_{ji} > 0$ при $i \ne j$, $I_i(t) \ge 0$ при $t \ge 0$. Функция активации f_δ (δ — время перехода нейрона в состояние активности) рассмотрена двух типов:

$$\delta = 0 \ \Rightarrow \ f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \le \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \qquad \delta > 0 \ \Rightarrow \ f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \le \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \le \theta+\delta, \\ 1, & v > \theta+\delta. \end{cases}$$

Для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений исследуется краевая задача с условиями $v_i(0) - v_i(T) = \gamma_i$, $i = \overline{1,n}$. В обоих случаях $\delta = 0$ (функция f_0 разрывная) и $\delta > 0$ (функция f_0 непрерывная) решение существует, а если

$$\delta > \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}}{1 - e^{-\alpha T}}, \quad \text{где} \quad W = (w_{ij})_{n \times n},$$

то рассматриваемая задача имеет единственное решение. В работе также получены оценки решения и его производной. Используются теоремы о неподвижных точках непрерывных отображений метрических и нормированных пространств и о неподвижных точках монотонных отображений частично упорядоченных пространств. Полученные результаты применены к исследованию периодических решений рассматриваемой дифференциальной системы.

Ключевые слова: нейронная сеть, дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, краевая задача, функция Грина, существование решения, отображения частично упорядоченных пространств, периодическое решение

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

Для цитирования: *Патрина А.С.* О краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, моделирующей электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 383–394.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394

On a boundary value problem for a system of differential equations modeling the electrical activity of the brain

Anastasia S. PATRINA
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The Hopfield-type model of the dynamics of the electrical activity of the brain which is a system of differential equations of the form

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0,$$

is under discussion. The model parameters are assumed to be given: $\alpha > 0$, $\tau_{ii} = 0$, $w_{ii} = 0$, $\tau_{ji} \geq 0$ and $w_{ji} > 0$ at $i \neq j$, $I_i(t) \geq 0$ at $t \geq 0$. Activation function f_δ (δ — the time of the transition of a neuron to the state of activity) is considered of two types:

$$\delta = 0 \;\Rightarrow\; f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \qquad \delta > 0 \;\Rightarrow\; f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta. \end{cases}$$

For the system of differential equations under consideration, a boundary value problem with the conditions $v_i(0) - v_i(T) = \gamma_i$, $i = \overline{1,n}$, is studied. In both cases $\delta = 0$ (discontinuous function f_0) and $\delta > 0$ (f_0 continuous function), a solution exists, and if

$$\delta > \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}}{1 - e^{-\alpha T}}, \quad \text{where} \quad W = (w_{ij})_{n \times n},$$

the problem has a unique solution. The work also provides estimates for the solution and its derivative. Theorems on fixed points of continuous mappings of metric and normed spaces and on fixed points of monotonic mappings of partially ordered spaces are used. The results obtained are applied to the study of periodic solutions of the differential system under consideration.

Keywords: neural network, differential equation with a discontinuous right-hand side, boundary value problem, Green's function, existence of a solution, mappings of partially ordered spaces, periodic solution

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/).

Mathematics Subject Classification: 34B60, 34A36, 47J99, 92B20.

For citation: Patrina A.S. On a boundary value problem for a system of differential equations modeling the electrical activity of the brain. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 383–394.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В последние десятилетия существенно возрос интерес к математическим моделям работы мозга, описывающим динамику его активности. Это связано с востребованностью таких моделей и в экспериментальной, и в клинической медицине, и для создания современных диагностических систем выявления патологий головного мозга. Для описания динамики электрической активности мозга наибольшее распространение получили модели на основе нейронных полей и нейронных сетей, как адекватно отражающие соответствующие процессы. Кратко опишем базовую сетевую модель Дж. Дж. Хопфилда (J. J. Hopfield, 1982, [1]), идеи построения которой используются во многих современных более сложных и, соответственно, более точных моделях.

Модель рассматривает мозг как конечную совокупность электрически возбудимых клеток — нейронов. Нейрон состоит из сомы, дендритов и аксона. Функция дендритов состоит в приеме и передаче к телу нейрона электрических импульсов. Сома служит для хранения, формирования и распространения электрического потенциала, а по аксону электрический импульс передается другим нейронам (подробнее см., например, [2, с. 222–224]). Такую модель называют нейронной сетью.

Пусть n — количество нейронов в сети, $v_i(t)$ — значение электрического потенциала i-го нейрона в момент времени $t \in [0,\infty)$, $I_i(t)$ — электрический потенциал внешнего воздействия на i-й нейрон в момент времени t, w_{ji} — коэффициент воздействия j-го нейрона на скорость изменения потенциала i-го нейрона. Предполагается, что выполнены следующие соотношения: $v_i(t) \geq 0$ и $I_i(t) \geq 0$ на $[0,\infty)$, $w_{ii} = 0$ и $w_{ji} > 0$ при всех $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$. В некоторых моделях дополнительно считается, что $w_{ji} = w_{ij}$; полученные здесь результаты это предположение не используют. Предположим, что для каждого нейрона скорость изменения электрического потенциала в любой момент времени t пропорциональна его значению в тот же момент времени с некоторым отрицательным коэффициентом $-\alpha$, $\alpha > 0$. Нейрон переходит из состояния покоя в состояние активности за время $\delta \geq 0$ начиная с некоторого порогового значения $\theta > 0$. Связь активации нейрона с уровнем его электрической активности определяет «функция активации» $f_\delta : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, задаваемая в модели Хопфилда при $\delta > 0$ формулой

$$f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta, \end{cases}$$

а при $\delta = 0$ — формулой

$$f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta. \end{cases}$$

В перечисленных предположениях электрическая активность головного мозга описывается следующей системой дифференциальных уравнений (см. [1, 3])

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0. \tag{0.1}$$

В ряде исследований (см., например, [4]) в нейронной системе учитывается запаздывание $\tau_{ji} > 0$ прохождения электрического импульса от j-го нейрона к i-му нейрону, $i \neq j$.

В этом случае модель принимает вид

$$\dot{v}_i(t) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big((S_{ji}v_j)(t)\big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0, \tag{0.2}$$

$$(S_{ji}v_j)(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_{ji}, \\ v_j(t-\tau_{ji}), & t \geq \tau_{ji}. \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать систему (0.2), полагая в ней $\tau_{ji} \geq 0$, таким образом, система (0.1) становится ее частным случаем. Формулируемые ниже утверждения о решениях системы (0.2) справедливы и для системы (0.1).

Функции $I_i(\cdot)$ будем предполагать измеримыми и суммируемыми на каждом конечном отрезке из $[0,\infty)$. Решением системы (0.2) на произвольном конечном отрезке $[0,T]$ будем считать абсолютно непрерывную на этом отрезке вектор-функцию $v = (v_1, \ldots, v_n)$, удовлетворяющую этому уравнению при п. в. $t \in [0,T]$.

В современных исследованиях моделей динамики нейронных систем рассматривается задача Коши для модельных систем дифференциальных уравнений (см. [4] и библиографию этой работы). Здесь предлагается рассмотреть краевую задачу для системы (0.2). Предлагаемое исследование мотивировано возможным применением краевых задач к исследованию режимов и ритмов электрической активности. Различные режимы и ритмы электрической активности характеризуют основные виды мозговой деятельности, а также наличие патологий. Соответствующие таким режимам и ритмам решения модельной дифференциальной системы (0.2) удовлетворяют некоторым краевым условиям. В частности, важной характеристикой электрической активности является частота периодических колебаний, то есть величина T^{-1}, где T период соответствующего решения $v(t)$. Такое решение удовлетворяет на $[0,T]$ краевому условию $v(T) - v(0) = 0$. А краевая задача с условием $v(T) - \lambda v(0) = 0$ позволяет при $\lambda > 1$ описывать процесс усиления ритма частоты T^{-1}, а при $0 < \lambda < 1$ — его ослабление. Отметим, что в известной автору литературе для нейронных систем краевые задачи не рассматривались.

В статье рассматривается краевая задача для системы (0.2) с периодическим условием

$$v_i(0) - v_i(T) = \gamma_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{0.3}$$

Основное содержание статьи составляют три пункта. В первом краевая задача (0.2), (0.3) (в общем случае $\delta \geq 0$) приводится к эквивалентному интегральному уравнению в пространстве непрерывных функций относительно функции v. Для полученного уравнения найдены априорные оценки решений и условия априорной неотрицательности решений. Во втором пункте рассматривается задача (0.2), (0.3) с непрерывной «функцией активации» f_δ, т. е. в случае $\delta > 0$. С использованием принципов неподвижной точки непрерывных отображений метрических пространств доказана разрешимость полученного уравнения, а следовательно, и рассматриваемой краевой задачи, получены оценки решений и сформулированы условия единственности решения. Во втором пункте исследуется случай разрывной «функцией активации» f_0, т. е. при $\delta = 0$. Здесь краевая задача (0.2), (0.3) сводится к эквивалентному интегральному уравнению в пространстве суммируемых функций относительно производной $\dot{v}$ искомой функции. Для установления существования решения и получения его оценки к уравнению (1.1) применяются результаты о неподвижных точках монотонных отображений частично упорядоченных пространств. Отметим, что близкие подходы к исследованию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью использовались в [5, с. 16,17], а в недавних работах [6–8] такие подходы были распространены на неявные дифференциальные и интегральные уравнения. Также в статье установлено, что если оказываемое на нейроны внешнее воздействие $I(t)$, $t \in [0,\infty)$, периодично с некоторым периодом $T > 0$, то в множестве решений системы (0.2) существует определенное на $[0,\infty)$ периодическое решение с таким же периодом.

1. Априорные оценки решений краевой задачи (0.2), (0.3)

Запишем краевую задачу (0.2), (0.3) в виде эквивалентной системы интегральных уравнений

$$v_i(t) = \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s)\Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta\big((S_{ji}v_j)(s)\big) + I_i(s)\Big)ds, \quad i=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина периодической краевой задачи для линейного скалярного уравнения

$$\dot\nu + \alpha\nu = y(t), \quad \nu(0) - \nu(T) = 0.$$

Эта функция, определяемая формулой

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha(t-s)}}{1-e^{-\alpha T}}, & 0 \le s < t \le T, \\ \dfrac{e^{-\alpha(T-s+t)}}{1-e^{-\alpha T}}, & 0 \le t < s \le T. \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, что любое абсолютно непрерывное решение задачи (0.2), (0.3) является решением уравнения (1.1), и обратно, любое абсолютно непрерывное решение уравнения (1.1) является решением задачи (0.2), (0.3). Интегральный оператор, порождаемый уравнением (1.1), действует в пространстве $C^n = C([0,T],\mathbb{R}^n)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$). При этом непрерывное решение этого уравнения, очевидно, является абсолютно непрерывной функцией. Таким образом, уравнение (1.1) относительно непрерывной функции v равносильно задаче (0.2), (0.3) относительно абсолютно непрерывной функции v.

Используя представление задачи (0.2), (0.3) в виде уравнения (1.1), получаем следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Если существует решение v задачи* (0.2), (0.3), *то его компоненты v_i при любом $i=\overline{1,n}$ удовлетворяют неравенствам*

$$v_i(t) \ge \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) I_i(s)ds \ge \frac{e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}}\Big(\gamma_i + \int_0^T I_i(s)ds\Big),$$

$$v_i(t) \le \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s)\big(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(s)\big)ds \le \frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\Big(\gamma_i + T\sum_{j=1}^n w_{ji} + \int_0^T I_i(s)ds\Big).$$

Это утверждение прямо следует из того, что для функции f_δ очевидно выполнено $0 \le f_\delta(v_j) \le 1$ $\forall v_j$, а функция Грина (1.2) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}} < G(t,s) \le \frac{1}{1-e^{-\alpha T}}. \tag{1.3}$$

Следствие 1.1. *Пусть*

$$\gamma_i \geq -e^{\alpha t}(1-e^{-\alpha T})\int_0^T G(t,s)I_i(s)ds, \quad i=\overline{1,n}.$$

Тогда любое решение v *задачи* (0.2), (0.3) *(если оно существует) является неотрицательной функцией.*

2. Разрешимость краевой задачи (0.2), (0.3) в случае $\delta > 0$

Рассмотрим краевую задачу с условием (0.3) для уравнения (0.2) — модели электрической активности головного мозга в случае непрерывной функции f_δ, т. е. при $\delta > 0$.

Для применения к эквивалентному рассматриваемой задаче уравнению (1.1) принципов неподвижной точки нормированных и метрических пространств полагаем, что в пространстве C^n задана «стандартная» норма $\|x\|_{C^n} = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|_{\mathbb{R}^n}$ элемента $x \in C^n$, а также соответствующее расстояние $\rho_{C^n}(x,u) = \|x-u\|_{C^n}$, $x,u \in C^n$.

Теорема 2.1. *В случае* $\delta > 0$ *краевая задача* (0.2), (0.3) *имеет решение в классе абсолютно непрерывных на отрезке* $[0,T]$ *функций.*

Доказательство. Зададим оператор $\Phi : C^n \to C^n$, $\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$, сопоставляющий произвольной функции $v = (v_1,\ldots,v_n) \in C^n$ функцию Φv с компонентами

$$\Phi_i v(t) = \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s)\Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta((S_{ji}v_j)(s)) + I_i(s)\Big)ds, \quad i=\overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Уравнение (1.1), эквивалентное рассматриваемой краевой задаче, запишем в виде

$$v = \Phi v$$

и проверим для него выполнимость условий теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. например, [9, гл. XVI, § 3]).

Обозначим

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & 0 & \ldots & w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{I} = \max_i \int_0^T I_i(s)ds, \quad \gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n).$$

В силу второго неравенства в (1.3) для любого $v \in C^n$ имеем

$$\|\Phi v\|_C \leq r := \frac{1}{1-e^{-\alpha T}}(|\gamma|_{\mathbb{R}^n} + \|W\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}T + \widehat{I}). \tag{2.2}$$

Из этого неравенства прямо следует, что $\Phi(B) \subset B$, где $B := \big\{x \in C^n : \|x\|_{C^n} \leq r\big\}$.

Покажем, что множество $\Phi(B)$ относительно компактно в пространстве C^n. Проверим условия теоремы Арцела–Асколи (см., например, [9, гл. I, § 5, теорема 4]). Из неравенства (2.2) следует, что $\Phi(B)$ равномерно ограничено. Проверим равностепенную непрерывность этого множества. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим

$$\sigma = \frac{1-e^{-\alpha T}}{2\alpha(|\gamma|_{\mathbb{R}^n} + T + 2)\big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + \widehat{I}\,\big)}\varepsilon.$$

Тогда для произвольных $t_1, t_2 \in [0,T]$ таких, что $0 < t_1 - t_2 < \sigma$, имеем

$$\begin{aligned}\big|(\Phi v)(t_1) - (\Phi v)(t_2)\big|_{R_n} &\le \frac{|\gamma|_{\mathbb{R}^n}|e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_1}|}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|\big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + |I(s)|_{R_n}\big)ds \\ &\le \frac{|\gamma|_{\mathbb{R}^n}\alpha(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}} + \big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + \widehat{I}\,\big)\int_0^T \big|G(t_1,s)-G(t_2,s)\big|ds.\end{aligned}$$

Воспользуемся очевидными оценками (использующими теорему Лагранжа о среднем)

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_1} \big|G(t_1,s)-G(t_2,s)\big|ds = \int_0^{t_1} \frac{|e^{-\alpha(t_1-s)} - e^{-\alpha(t_2-s)}|}{1-e^{-\alpha T}}ds \le \frac{\alpha t_1(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},\\ &\int_{t_1}^{t_2} \big|G(t_1,s)-G(t_2,s)\big|ds \le \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{1-e^{-\alpha T}}ds = \frac{2(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},\\ &\int_{t_2}^{T} \big|G(t_1,s)-G(t_2,s)\big|ds = \int_{t_2}^{T} \frac{|e^{-\alpha(T-s+t_1)} - e^{-\alpha(T-s+t_2)}|}{1-e^{-\alpha T}}ds \le \frac{\alpha(T-t_2)(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},\end{aligned}$$

из которых получим

$$\int_0^T \big|G(t_1,s)-G(t_2,s)\big|ds \le \frac{\alpha(T+2)(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},$$

$$\big|(\Phi v)(t_1) - (\Phi v)(t_2)\big|_{R_n} \le \big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + \widehat{I}\,\big)\frac{\alpha(|\gamma|_{\mathbb{R}^n} + T + 2)\sigma}{1-e^{-\alpha T}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Итак, равностепенная непрерывность, а следовательно, и относительная компактность в C^n множества $\Phi(B)$ доказана.

По теореме Шаудера отображение Φ имеет неподвижную точку. Следовательно, уравнение (1.1) и, соответственно, задача (0.2), (0.3) разрешимы. □

Теорема 2.1 не гарантирует единственность решения задачи (0.2), (0.3), утверждается лишь существование решения. Приведем пример нейронной системы, для которой периодическая краевая задача имеет более одного решения.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим «минимальную» сеть, содержащую $n = 2$ нейрона в случае и непрерывной, и разрывной функции активации, т. е. при $\delta \ge 0$. Пусть $\theta > 0$, $\theta + \delta < 1$, $\alpha = 1$, $w_{12} = w_{21} = 1$, $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$, $I_1(t) = I_2(t) = 0$ при $t \in [0,1]$, $T = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Краевая задача (0.2), (0.3) при таких значениях параметров имеет вид

$$\begin{cases} \dot v_1 + v_1 = f_\delta(v_2), \\ \dot v_2 + v_2 = f_\delta(v_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1(0) - v_1(1) = 0, \\ v_2(0) - v_2(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Непосредственной проверкой легко показать, что решениями этой задачи являются пары постоянных функций $v_1(t) \equiv 0$, $v_2(t) \equiv 0$ и $v_1(t) \equiv 1$, $v_2(t) \equiv 1$. Таким образом, решение этой задачи не единственно.

Приведем достаточные условия единственности решения краевой задачи (0.2), (0.3).

Теорема 2.2. *Если выполнено неравенство*

$$\delta > \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{1-e^{-\alpha T}}, \tag{2.4}$$

то краевая задача (0.2), (0.3) *имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных на отрезке* $[0,T]$ *функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при выполнении условия (2.4) оператор $\Phi : C^n \to C^n$, заданный формулой (2.1), является сжатием с коэффициентом

$$q := \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{\delta(1-e^{-\alpha T})}\|v-u\|_{C^n}$$

(здесь $q<1$ в силу предположения (2.4)).

Функция f_δ является липшицевой с коэффициентом δ^{-1}. Поэтому для любых $v,u\in C^n$ выполнено

$$\begin{aligned}\|\Phi v-\Phi u\|_{C^n} &\le \max_{t\in[0,T]}\left|\left(\int_0^T G(t,s)\sum_{j=1}^n w_{ji}\big(f_\delta(v_j(s)-f_\delta(u_j(s))ds\big)_{i=\overline{1,n}}\right|_{\mathbb{R}^n}\\ &\le \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{\delta(1-e^{-\alpha T})}\|v-u\|_{C^n}=q\|v-u\|_{C^n},\end{aligned}$$

т. е. отображение Φ, действительно, является сжимающим.

Согласно теореме Банаха о сжимающем отображении (см., например, [10, с. 74]) отображение Φ имеет единственную неподвижную точку. Поэтому уравнение (1.1) и, соответственно, задача (0.2), (0.3) однозначно разрешимы. □

В примере 2.1 решение краевой задачи (2.3) не единственно, поэтому условие (2.4) не может быть выполнено. Убедимся в этом непосредственной проверкой.

В этом примере $\delta<1$, $W=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $|W|_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}=1$ (при любой норме $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ в $\mathbb{R}^2$ такой, что $|(x_1,x_2)|_{\mathbb{R}^2}=|(x_2,x_1)|_{\mathbb{R}^2}$), $\alpha=1$. Функция $\frac{T}{1-e^{-\alpha T}}$ аргумента $T\in(0,\infty)$ возрастает и $\lim_{T\to 0+}\frac{T}{1-e^{-\alpha T}}=\frac{1}{\alpha}$, следовательно,

$$\frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{1-e^{-\alpha T}}>\frac{|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{\alpha}=1>\delta.$$

Таким образом, предположение (2.4), действительно, не выполнено.

3. Разрешимость краевой задачи (0.2), (0.3) в случае $\delta=0$

Здесь рассматривается краевая задача с условием (0.3) для уравнения (0.2) — модели электрической активности головного мозга в случае разрывной функции f_δ, т. е. при $\delta=0$. Используются известные результаты о неподвижной точке отображений частично упорядоченных пространств. Вначале приведем эти известные результаты и необходимые сведения о частично упорядоченных пространствах (подробнее см., например, [10, гл. I, § 4] и [11, § 1]).

Пусть на множестве $X\neq\emptyset$ задано отношение нестрогого порядка $\le$ (т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение). Эту алгебраическую систему называют *частично упорядоченным пространством* и обозначают $(X,\le)$. Вместо $x\le u$ можем использовать обозначение $u\ge x$. Если $x\le u$ и $x\neq u$, будем писать $x<u$ или $u>x$. Для любых $\underline{x},\overline{x}\in X$ таких, что $\overline{x}\le\underline{x}$, определим *отрезок* — множество $[\underline{x},\overline{x}]_X=\big\{x\in X:\ \underline{x}\le x\le\overline{x}\big\}$.

Пусть $U\subset X$. Элемент $u_0\in U$ называют минимальным в этом множестве, если для любого $u\in U$ выполнено $u\not< u_0$. Элемент $v\in X$ называют нижней границей множества U, если для любого $u\in U$ выполнено $u\ge v$. Точной нижней границей (инфимумом) множества U называют такую нижнюю границу $v_0 \in X$, что для любой нижней границы v выполнено $v < v_0$. Инфимум обозначают $v_0 = \inf U$.

Подмножество $S \subset X$ называют *цепью* (или линейно упорядоченным), если для любых его двух элементов $x, u \in S$ выполнено $x \le u$ или $u \le x$. Пространство $(X, \le)$ называем s*-полным* (*снизу*), если любая цепь, принадлежащая этому пространству, имеет точную нижнюю границу. Если точная нижняя граница есть у произвольного множества из X, то пространство называют *полным* (*снизу*).

Пусть задан оператор $\Psi : X \to X$. Сформулируем условия существования у этого оператора *неподвижной точки* — элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению

$$x = \Psi(x).$$

Напомним, что оператор Ψ называется *монотонным* (*изотонным*), если для любых элементов $x, u \in X$ таких, что $x \le u$, выполнено отношение $\Psi(x) \le \Psi(u)$.

Следующее утверждение (обычно формулируемое при несколько более обременительном предположении полноты пространства X, называют *теоремой Биркгофа–Тарского* (см. [12, с. 266]).

Теорема 3.1. *Пусть существуют элементы* $\underline{z}, \overline{z} \in X$ *такие, что*

$$\underline{z} \le \overline{z}, \quad \underline{z} \le \Psi(\underline{z}), \quad \overline{z} \ge \Psi(\overline{z}). \tag{3.1}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) *пространство* $U = [\underline{z}, \overline{z}]_X$ *является* s*-полным* (*относительно индуцированного порядка* $\le$);

2) *сужение оператора* Ψ *на пространство* $(U, \le)$ *является монотонным.*

Тогда во множестве U *существует неподвижная точка оператора* Ψ.

Доказательство существования неподвижной точки для полного пространства U см. [12, с. 266]. Для s-полного пространства U доказательство существования неподвижной точки приведено в [4]. Оно основано на теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [10, с. 40]), такой подход позволил заменить в условиях теоремы Биркгофа–Тарского требование полноты пространства U менее обременительным условием s-полноты.

З а м е ч а н и е 3.1. На основании теоремы Хаусдорфа несложно показать, что при выполнении условий теоремы 3.1 во множестве принадлежащих U неподвижных точек оператора Ψ существует минимальный элемент, не превосходящий заданную неподвижную точку $x \in U$ оператора Ψ. Действительно, можно определить подпространство $U_0 \subset U$, $U_0 = \{u \in U : u \ge \Psi(u)\}$ и задать в нем максимальную цепь S, содержащую заданную неподвижную точку $x \in U$ (очевидно, $x \in U_0$). Тогда точная нижняя граница ξ этой цепи в пространстве U будет искомым минимальным элементом во множестве неподвижных точек оператора Ψ.

Теперь сформулируем условия разрешимости краевой задачи (0.2), (0.3) в случае $\delta = 0$, т. е. когда функция активации нейронов разрывна. Для эквивалентного краевой задаче интегрального уравнения (1.1) не удается применить теорему Биркгофа–Тарского, так как в пространстве C^n отрезки не обладают свойством s-полноты. Поэтому здесь мы запишем краевую задачу (0.2), (0.3) в виде эквивалентного интегрального уравнения в пространстве L^n суммируемых функций, в котором отрезки обладают свойством s-полноты.

Воспользуемся подстановкой Азбелева (подробнее см. [13, с. 53]), а именно, рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\dot{v}_i + \alpha v_i = z_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

с граничными условиями (0.3). Для любой функции $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$ задача (0.2), (0.3) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $v = (v_1, \ldots, v_n)$, определяемое формулой

$$v_i(t) = \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) z_i(s)\, ds, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

где функция Грина $G(t,s)$ определяется равенством (1.2).

Используя определенную этой формулой подстановку, запишем задачу (0.2), (0.3) в виде системы интегральных уравнений

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta\Big(\frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) z_i(s)\, ds\Big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$

относительно неизвестной функции $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$. Если эта система разрешима, то по ее решению z формулой (3.3) определяется решение задачи (0.2), (0.3) (в том числе и при $\delta = 0$). Обратно, через решение v задачи (0.2), (0.3) по формуле (3.2) определяется решение системы уравнений (3.4). Таким образом, краевая задача (0.2), (0.3) представлена в виде уравнения неподвижной точки оператора $\Psi : L^n \to L^n$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, определяемого соотношением

$$\forall z \in L^n \quad (\Psi_i z)(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta\Big(\frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) z_i(s)\, ds\Big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. *В случае $\delta = 0$ краевая задача (0.2), (0.3) имеет решение в классе абсолютно непрерывных на $[0,T]$ функций. Компоненты v_i любого решения v при любом $i = \overline{1,n}$ удовлетворяют на $[0,T]$ неравенствам*

$$I_i(t) \le \dot{v}_i(t) + \alpha v_i(t) \le \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t). \tag{3.6}$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 3.1 для уравнения $z = \Psi(z)$, где оператор $\Psi : L^n \to L^n$ задан соотношением (3.5).

Прежде всего отметим, что любой отрезок в пространстве $(L^n, \le)$ является полным, и тем более s-полным.

Далее, так как значения функции f_δ принадлежат $[0,1]$, для любого $z \in L^n$ при всех $i = \overline{1,n}$ имеем

$$I_i(t) \le \Psi_i(z)(t) \le \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \quad t \in [0,T].$$

Поэтому для оператора Ψ выполнено условие (3.1), если определить функции $\underline{z}, \overline{z} \in L^n$ соотношениями

$$\underline{z}(t) = \big(I_i(t)\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad \overline{z}(t) = \Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t)\Big)_{i=\overline{1,n}}, \quad t \in [0,T].$$

И в заключение отметим, что оператор $\Psi : L^n \to L^n$, очевидно, монотонный.

Таким образом, все условия теоремы 3.1 выполнены, и согласно этой теореме система интегральных уравнений (3.4) имеет решение $z \in L^n$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{z} \le z \le \overline{z}. \tag{3.7}$$

Следовательно, краевая задача (0.2), (0.3) также разрешима. А из неравенств (3.7) в силу соотношений (3.2), (3.3) следуют требуемые оценки (3.6) ее решения v. □

З а м е ч а н и е 3.2. Определим множество $\Xi \subset L^n$ функций z вида $z = \dot{v} + \alpha v$, где v пробегает множество решений краевой задачи (0.2), (0.3). Согласно доказанной теореме все функции из этого множества удовлетворяют неравенствам (3.6). А согласно замечанию 3.1 к теореме 3.1 для любого $z \in \Xi$ в этом множестве существует минимальный элемент $\zeta \in \Xi$ и для него выполнено $\zeta \le z$.

З а м е ч а н и е 3.3. Утверждение теоремы 3.2 справедливо не только при $\delta = 0$, но и при $\delta > 0$. Но существование решения краевой задачи (0.2), (0.3) при $\delta > 0$ уже установлено в теореме 2.1. Теорема 3.2 в случае $\delta > 0$ представляет иные оценки (3.6) ее решения v. А замечание 3.2 характеризует структуру множества решений.

В заключение рассмотрим вопрос о существовании периодических решений системы уравнений (0.2) (рассматриваемой на полуоси $t \in [0, \infty)$) при любом $\delta \ge 0$. Из доказанных теорем получаем

Следствие 3.1. *Пусть функции $I_i(\cdot)$ являются периодическими с некоторым периодом $T > 0$. Тогда существует T-периодическое решение системы* (0.2).

References

[1] J. J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **79**:8 (1982), 2554–2558.

[2] В. Л. Быков, *Цитология и общая гистология*, Сотис, Санкт-Петербург, 2018, 237 с. [V. L. Bykov, *Cytology and General Histology*, Sothis Publ., St. Petersburg, 2018 (In Russian), 237 pp.]

[3] P. Van den Driesche, X. Zou, "Global attractivity in delayed Hopfield neural network models", *SIAM J. Appl. Math.*, **58** (1998), 1878–1890.

[4] А. С. Ланина, Е. А. Плужникова, "О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:139 (2022), 270–283. [A. S. Lanina, E. A. Pluzhnikova, "On the properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:139 (2022), 270–283 (In Russian)].

[5] Е. С. Жуковский, "Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах", *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 3–18; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, "Volterra inequalities in function spaces", *Sb. Math.*, **195**:9 (2004), 1235–1251.

[6] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities", *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[7] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, "On absrtact Volterra equations in partially ordered spaces and their applications", *CONCORD-90: Mathematical Analysis With Applications*. V. 318, International conference in honor of the 90th Birthday of Constantin Corduneanu (2018, Ekaterinburg, Russia), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, eds. S. Pinelas, A. Kim, V. Vlasov, 2020, 3–11.

[8] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления", *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2020), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Functional and differential inequalities and their applications to control problems", *Differential Equations*, **56**:11 (2020), 1440–1451.

[9] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984. [L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Mscow, 1984 (In Russian)].

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Физматлит, М., 2019; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[11] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[12] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982, 271 с. [L. A. Lyusternik, V. I. Sobolev, *A Short Course in Functional Analysis*, Higher School Publ., Moscow, 1982 (In Russian), 271 pp.]

[13] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Nauka Publ., Mscow, 1991 (In Russian)].

Информация об авторе

Патрина Анастасия Сергеевна, магистр, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8076-5745

Поступила в редакцию 25.08.2023 г.
Поступила после рецензирования 17.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Anastasia S. Patrina, Master, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8076-5745

Received 25.08.2023
Reviewed 17.11.2023
Accepted for press 23.11.2023